

ZMA – BI-SPOL-35

Základy integrálního počtu (primitivní funkce, neurčitý integrál, Riemannův integrál (definice, vlastnosti a geometrický význam)).

Obsah

1	Primitivní funkce	2
2	Neurčitý integrál	2
2.1	Inverze	2
2.2	Operace	2
2.2.1	Sčítání a násobení konstantou	2
2.2.2	Per partes	2
2.2.3	Substituce	3
3	Riemannův integrál	3
3.1	Infimum	3
3.2	Supremum	3
3.3	Norma dělení	4
3.4	Součet funkce	4
3.5	Horní a dolní integrál	4
3.6	Definice Riemanova integrálu	5
3.7	Postačující podmínka pro existenci RI	5
3.8	Integrální součet	5
3.8.1	Vztah s Riemannovým integrálem	5
3.9	Vlastnosti	5
3.9.1	Aditivita integrálu	5
3.9.2	Multiplikativita integrálu	5
3.9.3	Aditivita integrálu v mezích	6
3.9.4	Nerovnosti mezi integrály	6
3.9.5	Newtonova formule	6
3.10	Zobecněný RI	6
3.11	Vlastnosti RI	6
3.12	Výpočet obsahů plošných útvarů	7
4	Tabulky	8

1 Primitivní funkce

Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b) , kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Funkci F splňující podmínku

$$F'(x) = f(x) \text{ pro každé } x \in (a, b)$$

nazýváme **primitivní funkcí** k funkci f na intervalu (a, b) .

Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b) . Pak G je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b) právě tehdy, když existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{pro každé } x \in (a, b).$$

2 Neurčitý integrál

Nechť k funkci f existuje primitivní funkce na intervalu (a, b) . Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na (a, b) nazýváme neurčitým integrálem a značíme jej $\int f$ nebo $\int f(x) dx$.

2.1 Inverze

$$\int g'(x) dx = g(x) + c, \quad x \in (a, b)$$

$$\left(\int f \right)'(x) = f(x), \quad x \in (a, b).$$

2.2 Operace

2.2.1 Sčítání a násobení konstantou

$$\int (f + g) = \int f + \int g \quad \text{a} \quad \int (\alpha f) = \alpha \int f,$$

2.2.2 Per partes

Nechť funkce f je diferencovatelná na intervalu (a, b) a G je primitivní funkce k funkci g na intervalu (a, b) a konečně nechť existuje primitivní funkce k funkci $f'G$. Potom existuje primitivní funkce k funkci fg a platí

$$\int fg = fG - \int f'G.$$

2.2.3 Substituce

Věta o substituci I

Nechť pro funkce f a φ platí

- f má primitivní funkci F na intervalu (a, b) ,
- φ je na intervalu (α, β) diferencovatelná,
- $\varphi((\alpha, \beta)) \subset (a, b)$

Pak funkce $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ má primitivní funkci na intervalu (α, β) a platí

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)).$$

Věta o substituci II

Nechť f je definována na intervalu (a, b) a nechť φ je bijekce¹ intervalu (α, β) na (a, b) s nenulovou konečnou derivací. Pak platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = G(t) + C \implies \int f(x) dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C$$

3 Riemannův integrál

3.1 Infimum

Buď A neprázdná zdola omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme infimem množiny A , značíme $\inf A$, právě když

1. pro každé $x \in A$ platí $\alpha \leq x$ (α je dolní závora A),
2. pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\beta \leq \alpha$ (α je největší dolní závora A).

Pokud množina A není zdola omezená, pak klademe $\inf A := -\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\inf \emptyset := +\infty$.

3.2 Supremum

Buď A neprázdná zdola omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme supremem množiny A , značíme $\sup A$, právě když

1. pro každé $x \in A$ platí $\alpha \geq x$ (α je horní závora A),
2. pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\beta \geq \alpha$ (α je nejmenší horní závora A).

Pokud množina A není shora omezená, pak klademe $\sup A := +\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\sup \emptyset := -\infty$.

¹zobrazení f , které přiřazuje každému prvku H_f právě jeden prvek z D_f

3.3 Norma dělení

Buď dán interval $\langle a, b \rangle$. Konečnou množinu $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ takovou, že $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ nazýváme dělením intervalu $\langle a, b \rangle$. Bodům $x_k, k = 1, 2, \dots, n-1$ říkáme dělicí body intervalu $\langle a, b \rangle$. Intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ říkáme částečný interval intervalu $\langle a, b \rangle$ při dělení σ . Číslo

$$\nu(\sigma) := \max\{\Delta_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}, \quad \text{kde} \quad \Delta_k := x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

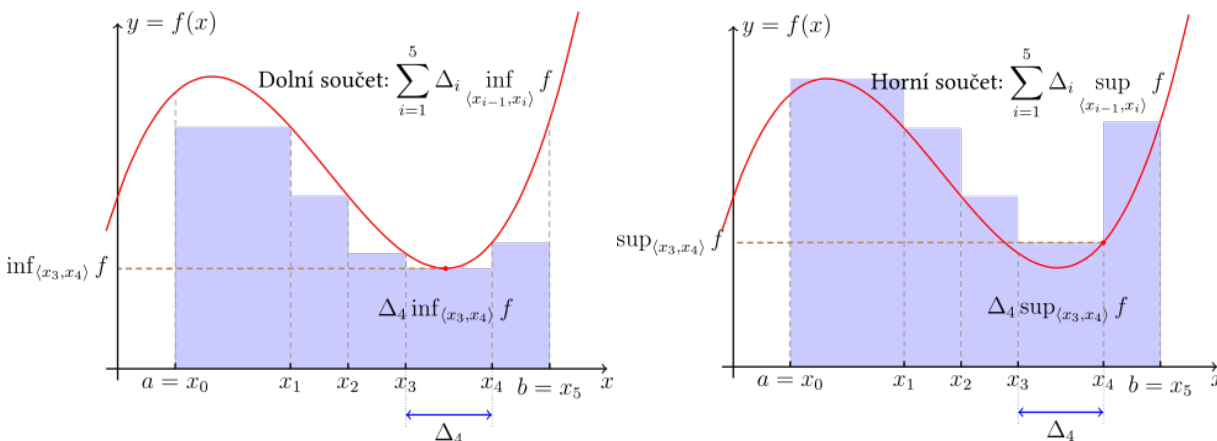
nazýváme **normou dělení** σ .

3.4 Součet funkce

Buďte funkce f definovaná a omezená na intervalu $J = \langle a, b \rangle$ a $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dělení intervalu J . Součty

$$S(\sigma, f) := \sum_{i=1}^n \Delta_i \sup_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f \quad \text{a} \quad s(\sigma, f) := \sum_{i=1}^n \Delta_i \inf_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f$$

nazýváme **horním součtem funkce** a **dolním součtem funkce** f při dělení σ .



3.5 Horní a dolní integrál

Pro funkci f definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu $J = \langle a, b \rangle$ definujeme čísla

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx := \inf\{S(\sigma) \mid \sigma \text{ dělení } J\} \quad \text{a} \quad \underline{\int_a^b} f(x) dx := \sup\{s(\sigma) \mid \sigma \text{ dělení } J\}.$$

a nazýváme **horním integrálem**, resp. **dolním integrálem**, funkce f na intervalu J .

3.6 Definice Riemanova integrálu

Pokud pro funkci f definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu J platí

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} = \underline{\int_a^b f(x) dx} \in \mathbb{R},$$

pak jejich společnou hodnotu nazýváme **Riemannovým integrálem** funkce f na intervalu J a toto číslo značíme symboly

$$\int_a^b f, \quad \text{případně} \quad \int_a^b f(x) dx.$$

Posloupnost dělení σ_n nazveme **normální**, pokud pro její normy platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\sigma_n) = 0$.

3.7 Postačující podmínka pro existenci RI

Buď f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom existuje její Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pokud je navíc (σ_n) normální posloupnost dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ potom limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(\sigma_n, f) \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S(\sigma_n, f)$$

existují, a jsou rovny Riemannově integrálu funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$.

3.8 Integrální součet

Pro funkci f spojitou na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a dělení $\sigma = x_0, x_1, \dots, x_n$, kde $x_0 = a$ a $x_n = b$, tohoto intervalu definujeme integrální součet funkce f při dělení předpisem

$$\mathcal{J}(\sigma, f) = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \Delta_i,$$

kde α_i patří do intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$.

3.8.1 Vztah s Riemannovým integrálem

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\sigma_n, f),$$

3.9 Vlastnosti

3.9.1 Aditivita integrálu

Nechť f a g jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom pro Riemannův integrál funkce $f + g$ (která je také automaticky spojitá na $\langle a, b \rangle$) platí

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

3.9.2 Multiplikativita integrálu

Nechť f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Potom pro Riemannův integrál funkce cf platí

$$\int_a^b (cf)(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

3.9.3 Aditivita integrálu v mezích

Riemannův integrál funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ existuje, právě když pro každé $c \in \langle a, b \rangle$ existují Riemannovy integrály funkce f na intervalech $\langle a, c \rangle$ a $\langle c, b \rangle$. V takovém případě navíc platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

3.9.4 Nerovnosti mezi integrály

Nechť jsou f a g spojité funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$ a necht platí nerovnost $f(x) \leq g(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$. Potom pro jejich Riemannovy integrály platí

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

3.9.5 Newtonova formule

Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ s primitivní funkcí F . Pak platí rovnost

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: \left[F(x) \right]_a^b.$$

3.10 Zobecněný RI

Nechť f je funkce definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $b \in (a, +\infty)$, která je Riemannovsky integrabilní na intervalu $\langle a, c \rangle$ pro každé $c \in (a, b)$. Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f(x) dx,$$

pak její hodnotu značíme

$$\int_a^b f(x) dx,$$

nazýváme zobecněným Riemannovým integrálem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ a říkáme, že integrál $\int_a^b f(x) dx$ konverguje.

3.11 Vlastnosti RI

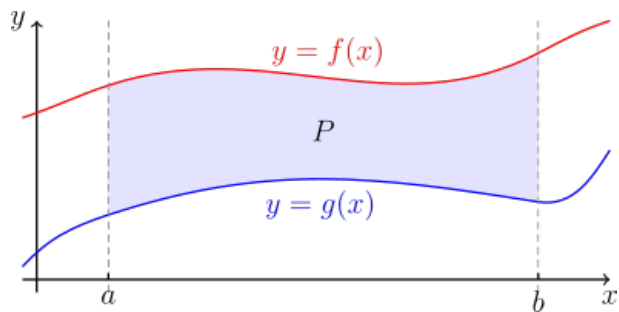
Nechť f je funkce spojitá na uvažovaných intervalech.

- Je-li f sudá funkce na $\langle -a, a \rangle$, pak $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$
- Je-li f lichá funkce na $\langle -a, a \rangle$, pak $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$
- Je-li f periodická na $\mathbb{R}$ s periodou T , pak pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx$

3.12 Výpočet obsahů plošných útvarů

Nechť f a g jsou funkce spojitě na $\langle a, b \rangle$ takové, že $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$. Pak obsah plochy P ohraničené přímkami $x = a$ a $x = b$ a grafy funkcí f a g je roven

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx.$$



4 Tabulky

vzorec	interval, parametry
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{Z}, n \leq -2$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$x \in (0, +\infty), \alpha \notin \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$x \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ a } a \neq 1$
$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \operatorname{tg}(x) + C$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\operatorname{cotg}(x) + C$	$x \in (k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$	$x \in (-1, 1)$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$