

ZDM – BI-SPOL-32

Metody řešení rekurentních rovnic, sestavování a řešení rekurentních rovnic při analýze časové složitosti algoritmů.

Obsah

1	Rekurentní rovnice	2
1.1	Obecná rekurentní rovnice	2
1.2	Rekurentní rovnice s konstantními koeficienty (LRRsKK)	2
1.3	Moivre-ova věta	2
2	Řešení	2
2.1	Substituční metoda	2
2.2	Iterační metoda	3
2.3	Mistrovská metoda	3

1 Rekurentní rovnice

1.1 Obecná rekurentní rovnice

Obecnou rekurentní rovnici rozumíme jakýkoliv vztah typu

$$a_{n+k} = f(a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \dots, a_n, n).$$

Nadále se ale budeme spíše zabývat lineárními rekurentními rovnicemi řádu $k \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+k} + c_{k-1}(n)a_{n+k-1} + \dots + c_1(n)a_{n+1} + c_0(n)a_n = b_n \text{ pro každé } n \geq n_0,$$

kde:

- $n \geq n_0$
- $n_0 \in \mathbb{Z}$
- $c_i(n)$ pro $i = 0, \dots, k-1$ jsou funkce $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$
- $c_0(n) \neq 0$
- $\{b_n\}_{n=n_0}^\infty$ (pravá strana rovnice)
- $\{a_n\}_{n=n_0}^\infty$ (řešení)
- pokud $\{\bar{a}_n\}_{n=n_0}^\infty$ je řešení, potom je $\{a_n\}_{n=n_0}^\infty$ řešením této rovnice právě tehdy, když se dá zapsat jako $\{a_n\}_{n=n_0}^\infty = \{\bar{a}_n\}_{n=n_0}^\infty + \{\tilde{a}_n\}_{n=n_0}^\infty$, kde $\{\tilde{a}_n\}_{n=n_0}^\infty$ je nějaké řešení přidružené homogenní rovnice.

1.2 Rekurentní rovnice s konstantními koeficienty (LRRsKK)

Lineární rekurentní rovnice řádu k s konstantními koeficienty je libovolná rekurentní rovnice ve tvaru:

$$a_{n+k} + c_{k-1}a_{n+k-1} + \dots + c_1a_{n+1} + c_0a_n = b_n$$

- $n \geq n_0$
- $n_0 \in \mathbb{Z}$
- $c_i \in \mathbb{R}$ pro $i = 0, \dots, k-1$ jsou konstanty
- $c_0 \neq 0$
- $\{b_n\}_{n=n_0}^\infty$ (pravá strana rovnice)
- $p(\lambda) = \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$ je charakteristický polynom této rovnice
- λ je charakteristické, či vlastní číslo
- $\{\lambda^n\}_{n=n_0}^\infty$ je řešení homogenní LRRsKK, pokud je λ vlastní číslo této LRRsKK
- pokud existuje k různých λ_i , potom posloupnosti $\{\lambda_i^n\}_{n=n_0}^\infty$ tvoří bázi prostoru řešení přidružené homogenní rovnice (stačí najít prvních k členů)
- pokud je λ m -násobným kořenem charakteristického polynomu, tak posloupnosti $(\lambda^n), (n\lambda^n), \dots, (n^{m-1}\lambda^n)$ jsou řešením přidružené homogenní rovnice

1.3 Moivre-ova věta

$$\alpha \pm i\beta = r[\cos(\Phi) \pm i\sin(\Phi)] \implies (\alpha \pm i\beta)^n = r^n[\cos(n\Phi) \pm i\sin(n\Phi)]$$

Tuto větu použijeme při hledání dvou nezávislých reálných posloupností.

2 Řešení

2.1 Substituční metoda

- Odhadneme (uhádneme) tvar řešení (=indukční hypotéza).

- Pomocí matematické indukce nalezneme konstanty a ověříme správnosti odhadnutého řešení
- Využívá se k odhadu horní a dolní meze

Uvažujme rovnici $t(n) = 2t(\lfloor n/2 \rfloor) + n$. Jako horní odhad řešení zkusme $t(n) \leq cn \log n$, kde $c > 0$ je vhodně zvolená konstanta. Indukcí dokážme správnost odhadu, tedy že pro řešení rovnice platí $t(n) = O(n \log n)$.

Indukční krok (ověření, že $t(n) \leq cn \log n$ vyhovuje rekurenci $t(n) = 2t(\lfloor n/2 \rfloor) + n$) Předpokládejme, že platí pro $\lfloor n/2 \rfloor$ a dosadíme $t(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c\lfloor n/2 \rfloor \log \lfloor n/2 \rfloor$ do počáteční rovnice. Dostaneme

$$\begin{aligned} t(n) &\leq 2(c\lfloor n/2 \rfloor \log \lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &= cn \log (n/2) + n \\ &= cn \log n - cn \log 2 + n \\ &= cn \log n - cn + n \\ &= cn \log n - (c - 1) \cdot n \\ &\leq cn \log n, \text{ pokud } c \geq 1 \end{aligned}$$

2.2 Iterační metoda

- Expandujeme rovnici dle iterací a získáme rozvoj na konečnou řadu a zkusíme najít aritmetickou či geometrickou posloupnost
- Využívá se k odhadu horní a dolní meze

Uvažujme rovnici $t(n) = 3t(\lfloor n/4 \rfloor) + n$ Protože platí $\lfloor \lfloor n/4 \rfloor / 4 \rfloor = \lfloor n/4^2 \rfloor$ atd., postupnou iterací dostaneme

$$\begin{aligned} t(n) &= n + 3t(\lfloor n/4 \rfloor) \\ &= n + 3\lfloor n/4 \rfloor + 3^2t(\lfloor n/4^2 \rfloor) \\ &= n + 3\lfloor n/4 \rfloor + 3^2\lfloor n/4^2 \rfloor + 3^3t(\lfloor n/4^3 \rfloor) \\ &= \dots \\ &= n + 3\lfloor n/4 \rfloor + 3^2\lfloor n/4^2 \rfloor + 3^3\lfloor n/4^3 \rfloor + \dots + 3^{\log_4 n} \Theta(1). \end{aligned}$$

Po zanedbání zaokrouhlovacích chyb a doplněním na nekonečnou konvergentní geometrickou řadu dostaneme

$$t(n) \leq n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i = 4n.$$

2.3 Mistrovská metoda

Nech $a \geq 1$ a $b > 1$ jsou konstanty, $f(n)$ funkce jedné proměnné. Uvažujme rekurentní rovnici: (zanedbáváme ceil a floor)

$$t(n) = at(n/b) + f(n)$$

Pak $t(n)$ má následující řešení:

1. Pokud $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ pro nějakou konstantu $\epsilon > 0$, pak $t(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
2. Pokud $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, pak $t(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.
3. Pokud $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ pro nějakou konstantu $\epsilon > 0$ a pokud $af(n/b) \leq cf(n)$ pro nějakou konstantu $c < 1$ a všechna $n \geq n_0$, pak $t(n) = \Theta(f(n))$.
4. Pokud je rozdíl mezi funkcemi menší než polynomiální, nelze tuto metodu použít!

Příklad 1

Rovnice $t(n) = 6t(n/4) + n$.

$a = 6, b = 4$

$n^{\log_4 6} \doteq n^{1,3} = \Omega(n) \implies f(n) = O(n^{\log_4 6 - 0,1}) \implies$ případ (1).

Čili $t(n) = \Theta(n^{\log_4 6})$.

Příklad 2

Rovnice (MergeSort) $t(n) = 2t(n/2) + n$

$a = 2, b = 2$

$n^{\log_2 2} = n = \Theta(n) \implies$ případ (2).

Čili $t(n) = \Theta(n \log n)$.

Příklad 3

Rovnice $t(n) = 3t(n/4) + n^2$

$a = 3, b = 4$

$n^{\log_4 3} \doteq n^{0,7} = o(n^2)$ a platí, že $3 \cdot (\frac{n}{4})^2 \leq cn^2$ pro nějakou $c < 1 \implies$ případ (3).

Čili $t(n) = (n^2)$

$f(n) = O(g(n))$	$\exists c \in \mathbb{R}^+$	$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 :$	$f(n) \leq c \cdot g(n)$
$f(n) = o(g(n))$	$\forall c \in \mathbb{R}^+$	$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 :$	$f(n) < c \cdot g(n)$
$f(n) = \Omega(g(n))$	$\exists c \in \mathbb{R}^+$	$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 :$	$c \cdot g(n) \leq f(n)$
$f(n) = \omega(g(n))$	$\forall c \in \mathbb{R}^+$	$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 :$	$c \cdot g(n) < f(n)$
$f(n) = \Theta(g(n))$	$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$	$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 :$	$c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$

