

MLO – BI-SPOL-15

Predikátová logika: jazyk, interpretace, pravdivost formulí, logický důsledek a ekvivalence. Formalizace matematických tvrzení a jejich negace. Teorie a jejich modely (např. uspořádání).

Obsah

1	Jazyk predikátové logiky	2
1.1	Term	2
1.2	Formule	2
1.3	Volné a vázané proměnné	2
2	Interpretace jazyka	2
3	Pravdivost formulí	3
4	Logická ekvivalence, logický důsledek	3
5	Příklad matematického příkladu	3
6	Teorie a Model	4
6.1	Úplná teorie	4

1 Jazyk predikátové logiky

Jazyk obsahuje *logické symboly* a *mimologické symboly* L .

- symboly pro *proměnné* (x, y, z)
- symboly pro *logické spojky* ($\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftarrow$)
- symboly pro *kvantifikátory* vždy následuje proměnná
 - obecný - "všichni" $\forall$
 - existenční - "některé/existuje" $\exists$
- pomocné symboly - závorky
- symboly pro *konstanty* ($K, S, \dots$)
- symboly pro *predikáty* (p, q, r) - dána četnost
- symboly pro *funkce* ($f, g, \dots$)

1.1 Term

Řetězec symbolů se nazývá **term** jestliže vznikne použitím těchto pravidel v konečně mnoho krocích:

- každá proměnná a konstanta je term
- jsou-li $t_1, t_2, \dots, t_n$ termy a f je n -ární funkční symbol, potom $f(t_1, \dots, t_n)$ je term

1.2 Formule

Formule je posloupnost symbolů, která vznikne aplikací následujících pravidel v konečně mnoha krocích:

- je-li n -ární predikátový symbol a $t_1, \dots, t_n$ jsou termy, pak $p(t_1, \dots, t_n)$ je formule - atomická formule
- jsou-li A a B formule, pak $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B) \dots$ jsou formule
- je-li x proměnná a A formule, pak $(\forall x)A$ a $(\exists x)A$ jsou formule

1.3 Volné a vázané proměnné

- podformule B je část formule A , která je sama formulí
- proměnná x má vázaný výskyt v A právě, když se vyskytuje v její podformuli ve tvaru $(\forall x)B(x)$ nebo $(\exists x)B(x)$
- výskyt proměnné v A , který není vázaný, je volný výskyt
- uzavřená formule obsahuje pouze vázané proměnné
- otevřená formule obsahuje pouze volné proměnné

2 Interpretace jazyka

Interpretace (realizace, struktura) $\mathcal{M} = \langle M, \dots, K_{\mathcal{M}}, \dots, p_{\mathcal{M}}, \dots, f_{\mathcal{M}}, \dots \rangle$ jazyka L obsahuje:

- neprázdnou množinu M , kterou nazýváme universum interpretace,
- je-li K konstanta, pak její interpretaci $K_{\mathcal{M}} \in M$
- je-li p n -ární predikát, pak n -ární relaci $p_{\mathcal{M}} \subseteq M^n \rightarrow M$ jako jeho interpretaci
- je-li f funkce mající n argumentů, pak funkci $f_{\mathcal{M}} : M^n \rightarrow M$ jako její interpretaci

Jeden jazyk může mít více interpretací

3 Pravdivost formulí

L je jazyk a M je jeho interpretace

- ohodnocení proměnných je funkce e z množiny proměnných, které každé volné proměnné přiřazuje nějaký prvek univerza M
- výrazem $t[e]$ označujeme hodnotu termu t při ohodnocení e .
 - je-li term t proměnná x , pak $t[e] = e(x)$
 - je-li n -ární funkční symbol a term t je $f(t_1, \dots, t_n)$, pak $t[e] = f(t_1[e], \dots, t_n[e])$
- výraz $e(x/m)$ se označuje hodnocení, které všem proměnným přiřadí stejnou hodnotu jako e , jenom $e(x) = m$

Pravdivost formule v interpretaci M při ohodnocení e se definuje indukcí podle složitosti formule

- i) $M \models p(t_1, \dots, t_n)[e]$, právě když $\langle t_1[e], \dots, t_n[e] \rangle \in p_M$
- ii) $M \models \neg A[e]$, právě když $M \not\models A[e]$,
- iii) $M \models (A \wedge B)[e]$, právě když $M \models A[e]$ a $M \models B[e]$,
- iv) $M \models (A \vee B)[e]$, právě když $M \models A[e]$ nebo $M \models B[e]$,
- v) $M \models (A \Rightarrow B)[e]$, právě když $M \not\models A[e]$ nebo $M \models B[e]$,
- vi) $M \models (A \Leftrightarrow B)[e]$, právě když $M \models A[e]$ právě tehdy, když $M \models B[e]$,
- vii) $M \models (\forall x)A[e]$, právě když pro **každý** prvek m z M je $M \models A[e(x/m)]$,
- viii) $M \models (\exists x)A[e]$, právě když pro **nějaký** prvek m z M je $M \models A[e(x/m)]$.

Figure 1: Tarského definice pravdy

A je pravdivá (platná) v interpretaci M , právě když pro každé ohodnocení e je pravdivá, tj. $M \models A[e]$.
 Formule A je splnitelná, právě když v nějaké interpretaci M pro nějaké ohodnocení e je pravdivá.
 A je kontradikce, právě když není splnitelná.

4 Logická ekvivalence, logický důsledek

- A a B jsou logicky ekvivalentní, $A \models B \wedge B \models A$, právě když pro každou interpretaci M a pro každé ohodnocení e platí: $M \models A[e]$, právě když $M \models B[e]$
- B je logickým důsledkem A , $A \models B$, právě když pro každou interpretaci M a pro každé ohodnocení e platí: jestliže $M \models A[e]$, pak $M \models B[e]$

5 Příklad matematického příkladu

- $(\exists u)(x = u + u)$ - x je sudé = negace = $(\forall u)\neg(x = u + u)$
- $\neg(\exists u)(x = u + u)$ - x je liché
- $(\exists x)(x = y * z)$ - x dělí y

6 Teorie a Model

- teorie je množina uzavřených formulí
- interpretace $\mathcal{M}$ jazyka L je modelem T , jestliže každá formule platí v $\mathcal{M}$
- formule A je logický důsledek teorie T , jestliže v každém modelu teorie T platí A
- teorie T je splnitelná, právě když má model

Teorie ekvivalence:

- $L = r(x, y)$. Predikát $r(x, y)$ je ekvivalence, jestliže platí
 - $R: (\forall x)r(x, x)$ - reflexivita
 - $T: (\forall x)(\forall y)(\forall z)(r(x, y) \wedge r(x, y) \Rightarrow r(x, z))$ - tranzitivita
 - $S: (\forall x)(\forall y)(r(x, y) \Rightarrow r(y, x))$ - symetrie

Teorie neostrého uspořádání

- $L = q(x, y)$. Pro teorii neostrého uspořádání platí následující axiomy
 - $R: (\forall x)r(x, x)$ - reflexivita
 - $T: (\forall x)(\forall y)(\forall z)(r(x, y) \wedge r(y, z) \Rightarrow r(x, z))$ - tranzitivita
 - $As: (\forall x)(\forall y)(r(x, y) \wedge r(y, x) \Rightarrow (x = y))$ - slabá asymetrie

Teorie ostrého uspořádání

- pro teorii ostrého uspořádání platí následující axiomy
 - $T: (\forall x)(\forall y)(\forall z)(r(x, y) \wedge r(x, y) \Rightarrow r(x, z))$ - tranzitivita
 - $IR: (\forall x)\neg p(x, x)$ - ireflexivita

6.1 Úplná teorie

Teorie T je úplná právě když každá uzavřená formule jazyka L je buď logickým důsledkem T , nebo je vyvratitelná v T ($T \models \neg A$).

Příkladem úplné teorie je teorie neomezeného hustého lineárního uspořádání, pro kterou navíc oproti částečnému uspořádání platí:

- $(\forall x)(\forall y)(p(x, y) \vee x = y \vee p(y, x))$ - linearita
- $(\forall x)(\forall y)((x < y) \Rightarrow (\exists z)(x < z < y))$ - hustota
- $(\forall x)(\exists y)(\exists z)(y < x \wedge x < z)$ - neomezenost