

LIN – BI-SPOL-12

Soustavy lineárních rovnic: Frobeniova věta a související pojmy, vlastnosti a popis množiny řešení, Gaussova eliminační metoda.

Obsah

1	Frobeniova věta	2
2	Vlastnosti a popis množiny řešení	2
3	Soustavy lineárních rovnic	2
3.1	Horní stupňovitý tvar	3
3.2	Postup pro řešení SLR	3
4	Gaussova eliminační metoda	3

3.1 Horní stupňovitý tvar

Definice 4. O matici $\mathbb{D} \in R^{m,n}$ řekneme, že je v **horním stupňovitém tvaru**, jestliže všechny řádky jsou nulové, nebo existuje $k \in \hat{m}$ tak, že řádky 1 až k matice $\mathbb{D}$ jsou nenulové a řádky $k+1$ až m jsou nulové a jestliže platí následující:

Označme pro každé $i \in \hat{k}$ index nejlevějšího nenulového prvku v i té řádce jako j_i , tj.

$$j_i = \min \{ \ell \in \hat{n} \mid \mathbb{D}_{i\ell} \neq 0 \}.$$

Potom platí $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k$.

Je-li matice v horním stupňovitém tvaru, potom sloupcům s indexy $j_1, j_2, \dots, j_k$ říkáme **hlavní sloupce**, ostatním říkáme **vedlejší sloupce**.

O soustavě $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ řekneme, že je v horním stupňovitém tvaru, pokud matice této soustavy $(\mathbb{A}|\mathbf{b})$ je v horním stupňovitém tvaru.

3.2 Postup pro řešení SLR

- Převodu SLR do matice $(\mathbb{A}|\mathbf{b})$.
- Převodu do HST pomocí GEM.
- Poslední sloupec hlavní $\rightarrow$ nemá řešení.
- Jinak:
 - Najdu volné a vázané proměnné (odpovídá vedlejším a hlavním sloupcům).
 - Pro partikulární řešení zvolím volné proměnné libovolně a dopočítám vázané proměnné.
 - Pro S_0 zvolím libovolnou bázi (třeba standardní).
 - Pro každý bazický vektor dopočítám z homogenní rovnice vázané proměnné a dostanu bázi S_0 .
 - Řešením je $S = \tilde{\mathbf{x}} + S_0$, kde S_0 je lineární obal báze.

4 Gaussova eliminační metoda

Cílem GEM je převést matici do horního stupňovitého tvaru, pomocí úprav (G1), (G2) a (G3).

(G1) Prohození dvou řádků.

(G2) Vynásobení jednoho řádku nenulovým číslem.

(G3) Přičtení jednoho řádku k jinému.